

電子光科学 I

次の[I-1]から[I-7]の7問について、それぞれ別の解答用紙に答えよ。なお、各問題に2枚以上の解答用紙を用いる場合は、「[I-1]（2枚目）」などのように明記せよ。

[I-1]

2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(配点 15 点)

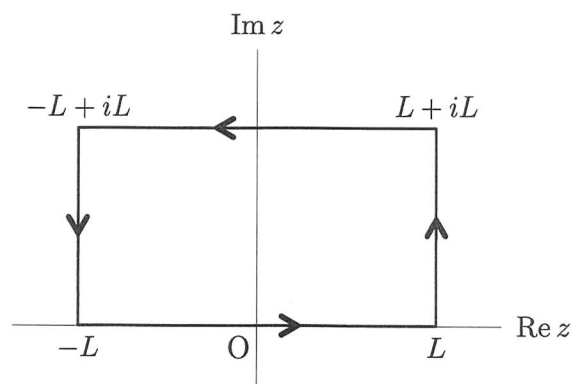
- (1) A の固有値と規格化された固有ベクトルを求めよ。
- (2) A を対角化する直交行列 P を求めよ。
- (3) $\exp(i\theta A)$ を2次正方行列として表せ。ただし、 θ は実数、 i は虚数単位とする。

[I-2]

図のような複素平面上の長方形の周を C とする．ただし， $L > 0$ である．このとき， $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ を満たす複素関数 $f(z)$ について

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_C f(z) e^{iz} dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx$$

が成立する．ここで， i は虚数単位である．



上式を用いて，次の積分を求めよ．ただし， $a > 0$ とする．

(配点 20 点)

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x + ia} dx$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x - ia} dx$

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2} dx$

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2 + a^2)^2} dx$

[I-3]

情報源アルファベット $A = \{0,1,2,3,4\}$ の値をとる確率変数 X によって表現される無記憶定常情報源を考える． X が値 x を取る確率を $P(X = x)$ と表記し，その値を以下の表に示す．符号アルファベット $B = \{0,1\}$ を用いてこの情報源の各記号を瞬時符号化するとき，最小の平均符号語長を持つ符号を C とし， $C(x)$ を記号 x に対応する符号語とする． C の平均符号語長を $\bar{L}$ とする．以下の問に答えよ．

$P(X = 0)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$
1/2	1/4	1/8	1/16	1/16

(配点 20 点)

- (1) エントロピー $H(X)$ を求めよ．ただし単位は bit とせよ．
- (2) C の平均符号語長 $\bar{L}$ を求めよ．
- (3) $C(0)$, $C(1)$, $C(2)$, $C(3)$, $C(4)$ の各符号語の符号語長を求めよ．
- (4) この情報源から互いに独立に生起した n 個の記号を $X_1, X_2, \dots, X_n$ とし，これらを個別に C によって符号化し，それらを順に並べた記号列 $Z_n = C(X_1)C(X_2) \dots C(X_n)$ を考える．
 - a) Z_n の長さを $L(Z_n)$ とする． $L(Z_n)$ の分散を求めよ．
 - b) 任意の $\epsilon > 0$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{L(Z_n)}{n} - \bar{L}\right| < \epsilon\right) = 1$ が成り立つことを示せ．任意の離散確率変数 Y について成り立つ不等式 $P(|Y - E[Y]| \geq \epsilon) \leq V[Y]/\epsilon^2$ を利用してよい．ただし，確率変数 Y の期待値，分散をそれぞれ $E[Y]$, $V[Y]$ と表記する．

[I-4]

x 軸上の一次元量子系において、ポテンシャル $U(x)$ のもと運動するエネルギー E 、質量 m の粒子を考える。位置 x 、時刻 t における波動関数を $\psi(x, t)$ としてシュレーディンガー方程式およびハミルトニアンは、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t), \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$$

で与えられ、ポテンシャル $U(x)$ は、 $V < E$ を満たす定数 V と、正の定数 a を用いて、

$$U(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ V & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

として与えられる。ただし、 i は虚数単位、 $\hbar$ は換算プランク定数である。以下の問に答えよ。

(配点 20 点)

- (1) 波動関数 $\psi(x, t)$ を t の関数 $f(t)$ と x の関数 $\phi(x)$ の積として $\psi(x, t) = f(t)\phi(x)$ としたとき、 $\phi(x)$ が満たすべきエネルギー固有方程式を示せ。ただし、 $\hat{H}$ はそのまま用いてもよい。
- (2) 問(1)のエネルギー固有方程式の解 $\phi(x)$ を係数 A, B, C, D, F と波数 k, k' ($k > 0, k' > 0$) を用いて以下のように与える。

$$\phi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x < 0) \\ Ce^{ik'x} + De^{-ik'x} & (0 \leq x \leq a) \\ Fe^{ikx} & (a < x) \end{cases}$$

- a) k と k' を求めよ。
- b) $x = 0$ における境界条件から、 B を C, D, k, k' を用いて表せ。
- c) $x = a$ における境界条件から、 C および D を、 F, k, k', a を用いて表せ。
- d) $B = 0$ になるために a が満たすべき条件を示せ。

[I-5]

中心軸が揃った半径 a の円柱導体と内径 $4a$ の円筒導体を考える. この2つの導体は無限に長く, その中心軸からの距離を r とする. 導体間は, r に依存する誘電率 $\varepsilon(r)$ の誘電体で満たされている. また, 外部の円筒導体に対して, 内部の円柱導体に電位 V が与えられている. 以下の問に答えよ. ただし, 真空の誘電率を ε_0 とする.

(配点 25 点)

はじめに, 図 1 に示すように, 導体間の誘電体が 2 層の場合を考える. その誘電率 $\varepsilon(r)$ は次式で与えられる.

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 2\varepsilon_0 & (a \leq r \leq 2a) \\ 4\varepsilon_0 & (2a < r \leq 4a) \end{cases}$$

- (1) 誘電体中の電場の大きさを求めよ.
- (2) 内部の円柱導体の表面に誘起される電荷の面密度 σ を求めよ.
- (3) $r = 2a$ の境界面に誘起される分極電荷の面密度 σ_p を求めよ.

次に, 図 2 に示すように, 導体間の誘電体の誘電率が連続的に変化する場合を考える. その誘電率 $\varepsilon(r)$ は次式で与えられる.

$$\varepsilon(r) = \frac{4a\varepsilon_0}{r}$$

- (4) 誘電体中の電場の大きさを求めよ.
- (5) 誘電体中の分極電荷の体積密度 ρ_p を求めよ.

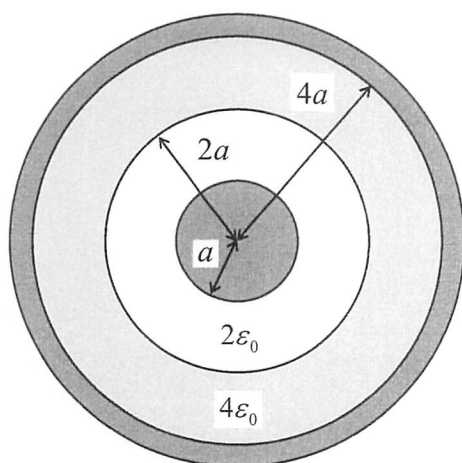


図1

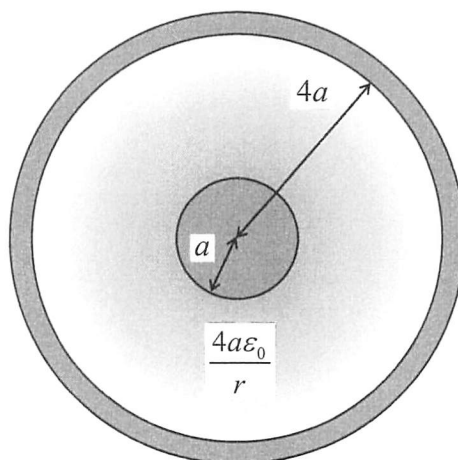


図2

[I-6]

真空中にある，導線が環状に密に N 回巻かれたトロイダルコイルを考える．トロイダルコイルの断面は半径 a の円形であり，その断面の中心とトロイダルコイルの中心との距離を R とする．いま，トロイダルコイルに電流 I を流す．以下の間に答えよ．ただし， $R \gg a$ であり，トロイダルコイルの断面内で磁場および磁束密度は一樣であるとする．真空の透磁率を μ_0 とする．

(配点 25 点)

図1のように，トロイダルコイルに透磁率 μ の磁性体が隙間なく挿入されている場合を考える．ここで，磁性体からの磁束の漏れは無視できるとする．

- (1) トロイダルコイル内の磁場の大きさを求めよ．
- (2) トロイダルコイルの自己インダクタンスを求めよ．

次に，図2のように，図1の磁性体に空隙をつくり，磁性体の端面間の距離を d とする．ただし， $d \ll R$ とする．ここで，空隙からの磁束の漏れは無視できるとする．

- (3) 空隙中の磁束密度の大きさを求めよ．
- (4) 空隙中の磁気エネルギーを求めよ．
- (5) 磁性体の端面に及ぼされる力の大きさを求めよ．

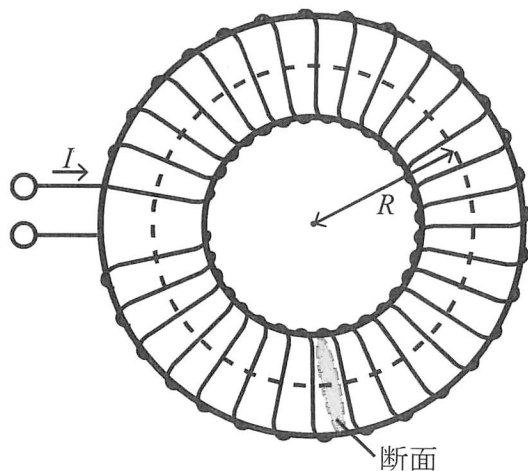


図 1

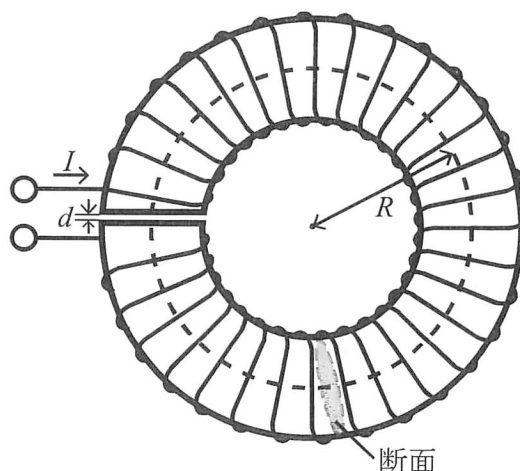


図 2

[I-7]

一様な媒質中を伝搬する電磁波を考える。媒質の誘電率を ε 、透磁率を μ 、電気伝導率を σ 、時刻を t とする。媒質中の電場を $\mathbf{E}$ 、電流密度を $\mathbf{J}$ とし、 $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ が成り立つものとする。媒質は電氣的に中性であり、媒質中の電荷密度は 0 であるとする。必要に応じて、任意のベクトル $\mathbf{F}$ に対して、 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ が成り立つことを用いて良い。

(配点 25 点)

(1) マクスウェル方程式より、次式が成り立つことを示せ。

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} = 0$$

次に、電磁波が真空中からこの媒質に垂直に入射することを考える。入射する電磁波は、角振動数 ω の平面波とする。平面波の進行方向に z 軸をとり、真空と媒質の界面を $z = 0$ とする。平面波の電場の振動方向を x 軸とする。また、媒質中では $\sigma \gg \omega \varepsilon$ が成り立つものとする。

(2) 媒質中の電場の x 成分が次式で与えられるものとする。

$$E_x(z, t) = A \exp(j\omega t - \gamma z)$$

ただし、 γ は伝搬定数、 j は虚数単位、 A は定数である。このとき、 γ を μ 、 σ 、 ω の中から必要なものを用いて示せ。必要に応じて、 $\sqrt{j} = \frac{j+1}{\sqrt{2}}$ の関係を用いて良い。

(3) 媒質表面の電場の振幅に対して、媒質中の電場の大きさが e^{-1} 倍に減衰する距離を、 μ 、 σ 、 ω の中から必要なものを用いて示せ。ただし、 e は自然対数の底である。

(4) 媒質中の波動インピーダンスを、 μ 、 σ 、 ω の中から必要なものを用いて示せ。