電子光科学　I

次の[I-1]から[I-7]の７問について，それぞれ別の解答用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合は，「[I-1]（２枚目）」などのように明記せよ．

[I-1]

下記の条件のもとで，実関数 $F(x,y,z)=xyz$ の極値を求めよ．

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

（配点 15 点）

[I-2]

複素数 $z = r\exp(i\theta)$ の正則関数を

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

とする．u, v は実変数 r, θ の実数値関数であり，i は虚数単位である．以下の問に答えよ．ただし，$r > 0$ とする．

（配点 20 点）

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}, \dfrac{\partial v}{\partial r}, \dfrac{\partial v}{\partial \theta}$ が満たす Cauchy-Riemann の方程式を求めよ．

(2) $z\dfrac{df}{dz}$ を $\dfrac{\partial u}{\partial \theta}, \dfrac{\partial v}{\partial \theta}$ を用いて表せ．

(3) $v(r,\theta) = p\theta$ とする．ここで，p は定数である．

　a) $u(r,\theta)$ を求めよ．

　b) $\int_C df$ を求めよ．ただし，$C = \{z \mid |z| = 1\}$ である．

[I-3]

図に示すように，送信アルファベット$\{0, 1, 2\}$の一つの符号が送信されると，受信アルファベット$\{0, 1, 2, 3\}$の一つの符号が受信される通信路を考える．送信符号および受信符号を表す確率変数をそれぞれXおよびYとすると，$Y=X$となる確率は$1-\varepsilon$，$Y=X+1$となる確率はεである．また，Xが0，1，2となる確率をそれぞれp_0，p_1，p_2とし，$p_0+p_1+p_2=1$とする．以下の問に答えよ．なお，エントロピー，相互情報量，通信路容量の単位はビットとせよ．

（配点 20 点）

(1)　$p_0=p_1=\dfrac{1}{2}$におけるXのエントロピー$H(X)$を求めよ．

(2)　問(1)の条件において，Yを条件とするXの条件付きエントロピー$H(X|Y)$を求めよ．

(3)　問(1)の条件において，XとYの相互情報量$I(X, Y)$を求めよ．

(4)　$p_0=p_1=\dfrac{1}{3}$におけるXとYの相互情報量$I(X, Y)$を求めよ．

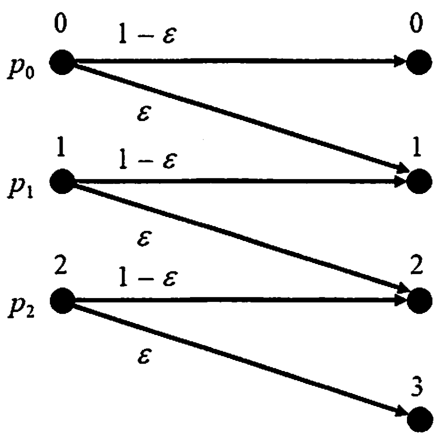
(5)　図の通信路において，$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$とする．通信路容量が達成されるときのp_0，p_1，p_2の関係で正しいものを以下から選び，(i)～(iii)の記号で答えよ．また，その理由も述べること．

　(i)　$p_0>p_2$かつ$p_1>p_2$

　(ii)　$p_1>p_0$かつ$p_2>p_0$

　(iii)　$p_2>p_1$かつ$p_0>p_1$

(6)　$\varepsilon=\dfrac{1}{2}$における図の通信路の通信路容量Rを求めよ．



[I-4]
一次元量子系において，質量 m の粒子が固有角振動数 ω で振動する調和振動子を考える．位置演算子 $\hat{x}$ および運動量演算子 $\hat{p}$ を，

$$\hat{x} = x, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

として，ハミルトニアン $\hat{H}$ は,

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

で与えられる．ただし，i は虚数単位，$\hbar$ は換算プランク定数である．演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の交換関係を $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ とする．以下の問に答えよ．

（配点 20 点）

(1) 交換関係 $[\hat{x}, \hat{p}]$ を計算せよ．

(2) 消滅演算子および生成演算子 $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ を

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}, \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{x} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}$$

と定義する．交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ を求めよ．また，ハミルトニアン $\hat{H}$ を $\hat{a}, \hat{a}^\dagger, \hbar, \omega$ を用いて表せ．

(3) 演算子 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ の規格化された固有状態 $|n\rangle$ を $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ と定義する．$\hat{a}^\dagger|n\rangle$ を計算せよ．

(4) 状態 $|0\rangle$ の波動関数 $\psi_0(x)$ は，規格化因子 C，および $r = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ を用いて

$$\psi_0(x) = C\exp\left(-\frac{x^2}{2r^2}\right)$$

で与えられる．状態 $|1\rangle$ の波動関数 $\psi_1(x)$ を求めよ．ただし，C, r をそのまま用いて良い．

[I-5]

原点をOとする直交座標系 (x,y,z) における静電場について，以下の問に答えよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．

（配点 25 点）

(1) 図 1 に示すように，誘電体 1（誘電率 $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$）に満たされた空間中の点 $(a, 0, 0)$ に電荷量 Q_1 の点電荷がある．このとき，y 軸上の電場の x 成分 E_x と y 成分 E_y を求めよ．

(2) 図 2 に示すように，誘電体 2（誘電率 $\varepsilon_2 > \varepsilon_0$）に満たされた空間中の点 $(a, 0, 0)$ に電荷量 Q_2 の点電荷があり，また，点 $(-a, 0, 0)$ に電荷量 Q_3 の点電荷がある．このとき，y 軸上の電場の x 成分 E_x と y 成分 E_y を求めよ．

(3) 問(2)の状況において，$x = \pm a$ を除いた x 軸上の電束密度の x 成分 D_x を求めよ．

(4) 図 3 に示すように，誘電体 1 と誘電体 2 が y-z 面において接しており，点 $(a, 0, 0)$ に電荷量 Q_2 の点電荷がある．誘電体 1 中の電場の x 成分を E_{1x}, y 成分を E_{1y} とする．また，誘電体 2 中の電場の x 成分を E_{2x}, y 成分を E_{2y} とする．誘電体 1 と誘電体 2 の境界における E_{1x}, E_{1y}, E_{2x}, E_{2y} の満たすべき条件を示せ．

(5) 問(4)の状況において，y 軸上の電場の y 成分 E_y を求めよ．

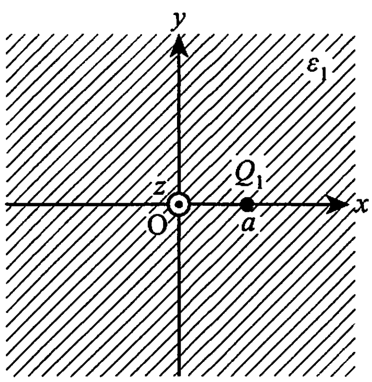


図 1

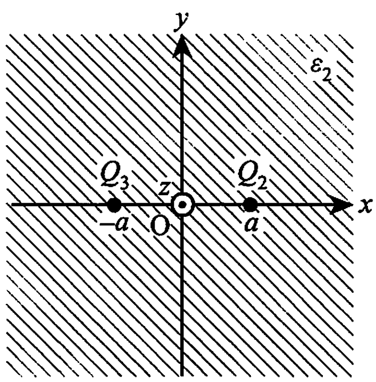


図 2

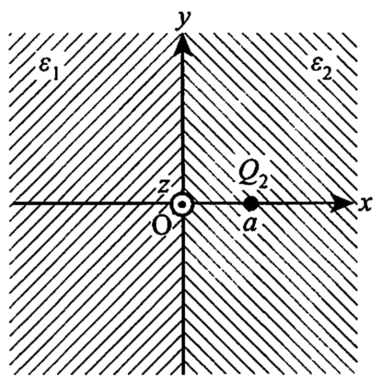


図 3

[I-6]

図１のように，真空中に半径がそれぞれ a_1 および a_2 の円形のコイル１およびコイル２が，中心軸を揃えて平行に置かれている．コイルの中心間の距離は d である．いま，コイル１に図の向きに強さ $I\ (>0)$ の直流電流を流した．次の問に答えよ．ただし，d は a_1 および a_2 に比べて十分大きいものとする ($d \gg a_1,\ a_2$)．また，真空の透磁率を μ_0 とせよ．

(配点 25 点)

(1) コイル１の中心における磁束密度の大きさを求めよ．

(2) コイル２の中心における磁束密度の大きさを求めよ．

(3) コイル１とコイル２の相互インダクタンスの絶対値を求めよ．

次に，図２のように２つのコイルを中心間の距離は変えずに回転し，同一平面内に置いた．そして，コイル１に図の向きに強さ $I\ (>0)$ の直流電流を流した．

(4) コイル２の中心における磁束密度の大きさを求めよ．

(5) コイル１とコイル２の相互インダクタンスの絶対値を求めよ．

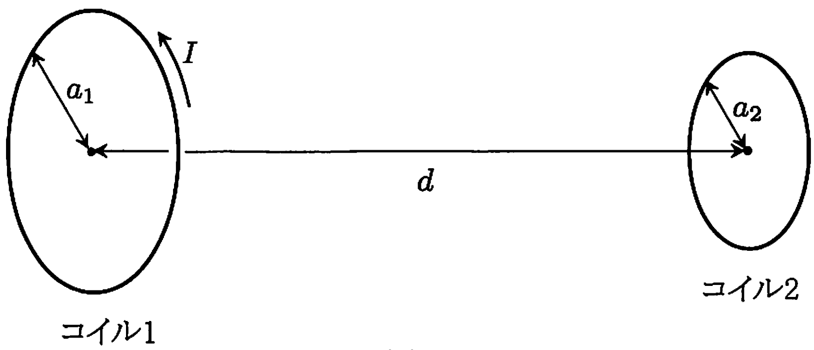


図１

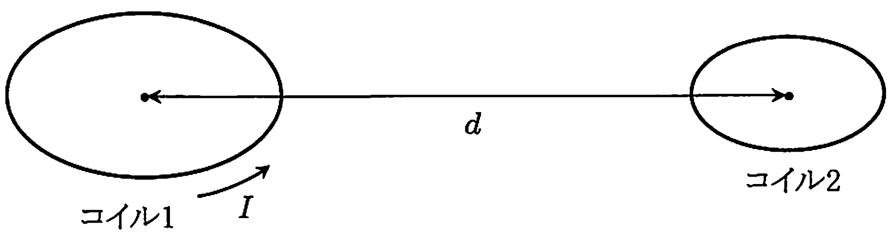


図２

[I-7]

図に示すように直交座標系 (x, y, z) において，$z = 0$ の位置で誘電体 1 (誘電率 $\varepsilon_1 > 0$，透磁率 $\mu_1 > 0$) と誘電体 2 (誘電率 $\varepsilon_2 > 0$，透磁率 $\mu_2 > 0$) が接している．その界面での電磁波の反射・透過現象を考える．入射波は平面波とする．電磁波の入射角，反射角，透過角は，図のように電磁波の進行方向と z 軸のなす角で定義し，入射角と反射角は θ_1，透過角は θ_2 とする．ただし，$0 \leq \theta_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$ である．また，入射波，反射波，透過波の電場をそれぞれ $\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = (E_{\mathrm{i}x}, 0, 0)$，$\boldsymbol{E}_\mathrm{r} = (E_{\mathrm{r}x}, 0, 0)$，$\boldsymbol{E}_\mathrm{t} = (E_{\mathrm{t}x}, 0, 0)$，磁場をそれぞれ $\boldsymbol{H}_\mathrm{i} = (H_{\mathrm{i}x}, H_{\mathrm{i}y}, H_{\mathrm{i}z})$，$\boldsymbol{H}_\mathrm{r} = (H_{\mathrm{r}x}, H_{\mathrm{r}y}, H_{\mathrm{r}z})$，$\boldsymbol{H}_\mathrm{t} = (H_{\mathrm{t}x}, H_{\mathrm{t}y}, H_{\mathrm{t}z})$ と表す．$E_{\mathrm{i}x}$，$E_{\mathrm{r}x}$，$E_{\mathrm{t}x}$ が下記のように表されるとき，以下の問に答えよ．なお，E_0 は入射電場の振幅，A は反射電場の振幅，B は透過電場の振幅，ω は電磁波の角周波数，k_1，k_2 はそれぞれの誘電体における電磁波の波数，t は時刻，j は虚数単位を表す．

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{i}x} &= E_0 \exp\left[-jk_1\left(z\cos\theta_1 + y\sin\theta_1\right)\right]\exp\left(j\omega t\right)\\
E_{\mathrm{r}x} &= A \exp\left[-jk_1\left(-z\cos\theta_1 + y\sin\theta_1\right)\right]\exp\left(j\omega t\right)\\
E_{\mathrm{t}x} &= B \exp\left[-jk_2\left(z\cos\theta_2 + y\sin\theta_2\right)\right]\exp\left(j\omega t\right)
\end{aligned}
$$

（配点 25 点）

(1) 入射磁場 $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$，反射磁場 $\boldsymbol{H}_\mathrm{r}$，透過磁場 $\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$ の x，y，z 軸方向の各成分を ε_1，ε_2，μ_1，μ_2，$E_{\mathrm{i}x}$，$E_{\mathrm{r}x}$，$E_{\mathrm{t}x}$，θ_1，θ_2 のうち必要なものを用いて表せ．

(2) 誘電体 1 と誘電体 2 の誘電率の比を $\varepsilon_\mathrm{r} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$，透磁率の比を $\mu_\mathrm{r} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$ とする．反射電場，透過電場の振幅 A，B を，E_0，θ_1，θ_2，ε_r，μ_r のうち必要なものを用いて表せ．

(3) $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$，$\mu_\mathrm{r} = 1$ としたとき，どのような角度で電磁波を入射しても，電場反射率 $\left(\dfrac{A}{E_0}\right)$ はゼロにはなりえないことを示せ．

(4) いま，透磁率の比 μ_r が自由に与えられるとき，$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ の条件で電場反射率がゼロとなる入射角 $\theta_1 = \theta_\mathrm{B}$ が存在しうることを示せ．また，μ_r を与えたとき，電場反射率がゼロとなる入射角 θ_B が存在するための ε_r が取りうる範囲を μ_r を用いて示せ．