

電子光科学 I

次の[I-1]から[I-7]の7問について、それぞれ別の答案用紙に答えよ。なお、各問題に2枚以上の答案用紙を用いる場合は、「[I-1] (2枚目)」などのように明記せよ。

[I-1]

複素関数 $f(z) = u + iv$ が $z = x + iy$ の正則関数であるとする。

$u = x^3 + axy^2$ のとき a と v を求めよ。ただし、 $x, y, a, u, v \in \mathbb{R}$, i は虚数単位とする。

(配点 15 点)

[I-2]

3次元実ベクトル空間において線形写像 $f(x) = Ax$ を考える。

ただし、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ とする。以下の問に答えよ。

(1) Ax からなる集合の次元と一組の基底を求めよ。

(2) $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ となる x の集合を求めよ。

(3) $f(x) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ となる x の集合を求めよ。

(配点 20 点)

[I-3]

以下の不定積分を求めよ。

(1) $\int \cos^2 x dx$

(2) $\int x \sin x dx$

(3) $\int x^2 \cos x dx$

(4) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(配点 20 点)

[I-4]

通信路の入力の確率変数を X ，そのエントロピーを $H(X)$ ，出力の確率変数を Y ，そのエントロピーを $H(Y)$ ， X に対する Y の条件付きエントロピーを $H(Y|X)$ ， Y に対する X の条件付きエントロピーを $H(X|Y)$ とする．入力アルファベットを A ，出力アルファベットを B ，入力記号と出力記号をそれぞれ $x \in A$ ， $y \in B$ として，同時確率を $P(x,y)$ ，周辺確率を $P(x)$ ， $P(y)$ ，条件付き確率を $P(y|x)$ ， $P(x|y)$ とする．以下の問に答えよ．

- (1) 同時エントロピー $H(X,Y)$ を， $H(X)$ ， $H(Y)$ ， $H(Y|X)$ ， $H(X|Y)$ のうち必要なもので表す式を導出せよ．
- (2) 出力記号 y を受信することによって，入力記号 x について得た情報量を求めよ．
- (3) 問(2)の結果から相互情報量 $I(X;Y)$ を導出し， $H(X)$ ， $H(Y)$ ， $H(Y|X)$ ， $H(X|Y)$ のうち必要なもので表せ．
- (4) $I(Y;X) = I(X;Y)$ であることを示せ．

(配点 20 点)

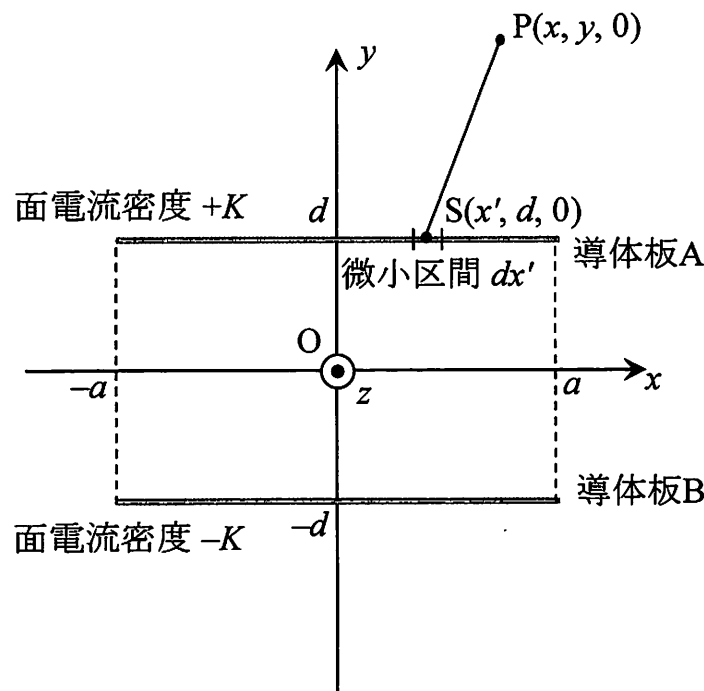
[I-5]

図のように、 $y = \pm d$ の面上にある、 z 方向に無限に長い、幅 $2a$ の2枚の導体板 A および B に、大きさが同じで逆向きの電流が z 軸に平行に流れている。導体板 A および B 中の電流は、面電流密度 (x 方向の単位長さあたりの電流) がそれぞれ $+K$ および $-K$ ($+z$ 方向を正とする) で、 x 方向の分布が一様であるとして以下の間に答えよ。ただし、導体板の厚さは無視し、真空の透磁率を μ_0 とせよ。なお、必要により以下の積分公式を用いてよい。

$$\int \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \frac{x}{\alpha} + C \quad (\alpha, C \text{ は定数})$$

- (1) 導体板 A を流れる電流のうち、図に示す点 $S(x', d, 0)$ ($-a \leq x' \leq a$) 上にある微小区間 dx' を通り、 z 軸に平行に流れる電流が、点 $P(x, y, 0)$ につくる磁束密度の大きさを求めよ。
- (2) 導体板 A を流れる電流が点 $P(x, y, 0)$ につくる磁束密度の x 成分を求めよ。
- (3) 導体板 A を流れる電流が点 $P(x, y, 0)$ につくる磁束密度の y 成分を求めよ。
- (4) 導体板 A と B を流れる電流が点 $P(x, y, 0)$ につくる合計の磁束密度の x 成分と y 成分をそれぞれ求めよ。
- (5) 面電流密度の大きさを一定としたまま $a \rightarrow \infty$ とした場合の、 $-d < y < d$ の領域中の単位体積あたりの磁場のエネルギーを求めよ。

(配点 25 点)



[I-6]

以下の問に答えよ。

(配点 25 点)

- (1) 図 1 に示すように、真空中を伝搬する平面電磁波が屈折率 n の媒質（透磁率は真空のそれに等しい）に対して垂直に入射した。境界面における反射係数 r_{1n} と透過係数 t_{1n} を n を用いて表せ。
- (2) 図 2 に示すように、屈折率 n の媒質中（透磁率は真空のそれに等しい）を伝搬する平面電磁波が真空領域との境界面に垂直に入射した。境界面における反射係数 r_{n1} と透過係数 t_{n1} を n を用いて表せ。

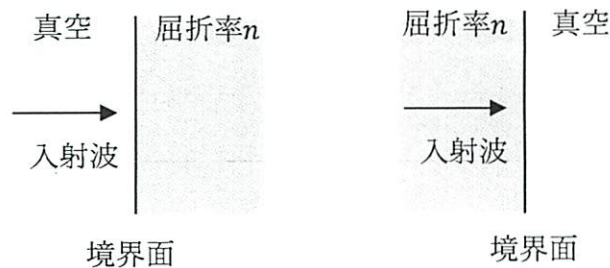


図 1

図 2

次に、図 3 のように屈折率 $n(> 1)$ で厚さ L の平面媒質（透磁率は真空のそれに等しい）に平面電磁波（真空中での波数を k とする）が垂直に入射する場合を考える。入射した平面電磁波の電場の複素振幅を E_0 とする。

- (3) 図 4 のように境界面 1 を透過した後に境界面 2 で反射され、その後に境界面 1 を透過した電磁波の、透過直後の電場振幅を求めよ。その際に問(1)で定義した r_{1n} 、 t_{1n} と問(2)で定義した r_{n1} 、 t_{n1} はそのまま用いて良い。
- (4) 電磁波は図 5 に示すように境界面 1 と境界面 2 で反射を繰り返す。この多重反射を考慮した系全体の反射係数を L 、 k 、 n を用いて表せ。
- (5) 問(4)で求めた反射係数が 0 となる時に k が満たす条件を L 、 n を用いて表せ。

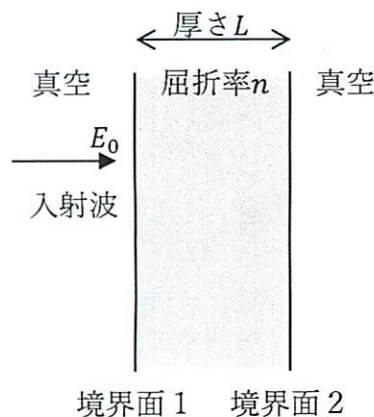


図 3

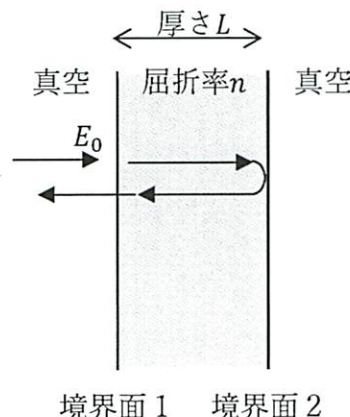


図 4

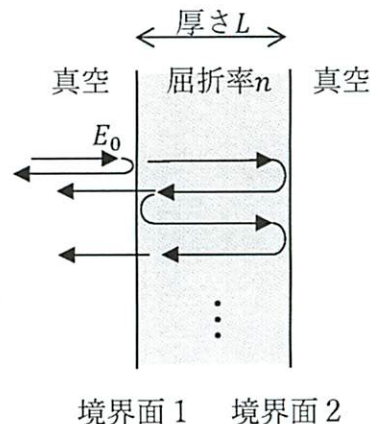


図 5

[I-7]

図のように、 $y = 0$ と $y = L$ に設置された 2 枚の無限に大きな完全導体板で挟まれた真空中を x 軸方向に伝搬する電磁波について考える。ただし、すべての場の量は、 z 軸方向に依存しないものとし、真空の誘電率を ϵ_0 、透磁率を μ_0 とする。以下の問に答えよ。

(配点 25 点)

- (1) マクスウェル方程式から電場の x , y 成分 E_x , E_y 及び、磁場の z 成分 H_z に対して成立する 3 つの方程式を導け。
- (2) 問(1)で得られた方程式から E_x と E_y を消去することによって H_z に対して成立する方程式を導け。
- (3) 問(2)で得られた方程式の解が、波数 k と角周波数 ω を用いて $H_z = h(y) e^{j(\omega t - kx)}$ で与えられるとき、 $h(y)$ が満たすべき方程式を導け。ただし、 j は虚数単位とする。
- (4) $h(y)$ の一般解を求めよ。
- (5) $h(0) = H_0$ として境界条件から $h(y)$ を求め、 H_z の解を k, x, ω, t, H_0, L を用いて表せ。また、 k, ω, L が満たすべき関係式を示せ。
- (6) 問(5)の結果に基づいて電磁波の伝搬におけるカットオフ現象について説明せよ。

