電子光科学　I

次の[I-1]から[I-7]の７問について，それぞれ別の答案用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合は，「[I-1]（２枚目）」などのように明記せよ．

[I-1]
以下の問に答えよ． ただし, i は虚数単位とする．

（配点 15 点）

(1) 次の値の実部と虚部をそれぞれ求めよ．

a) i^i

b) $\sin i$

(2) $z = x + iy,\ w = u + iv\ (x, y, u, v \in \mathbb{R})$ とする．変換式 $w = \cos z$ によって，x軸に平行な直線 $y = c$ （cは定数, $c \neq 0$）はどのような図形に写されるか，式と共に述べよ．

[I-2]
２次以下の実係数多項式 $f(x) = ax^2 + bx + c$からなるベクトル空間 Vにおいて線形変換Tを$T(f(x)) = f(x+1)$と定義する．以下の問に答えよ．

（配点 20 点）

(1) ベクトル空間 Vにおける１組の基底を答えよ．

(2) 問(1)で答えた基底に関する Tの表現行列 Aを求めよ．

(3) 表現行列 Aの固有値と固有ベクトルを求めよ．

[I-3]

微分方程式

$$f''(x) + (-x^2 + 2n + 1)f(x) = 0$$

について考える．ただし，n は非負の整数（$n = 0,1,2,\ldots$）であるとする．以下の問に答えよ．

（配点 20 点）

(1) $n = 0$ の場合に $e^{-x^2/2}$ が解となることを示せ．

(2) $f(x) = h(x)e^{-x^2/2}$ とするとき，$h(x)$ が満たすべき微分方程式を導け．

(3) $h(x)$ が多項式で与えられるとし，係数 a_k を用いて

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

と書くことにする．このとき，a_kが満たすべき漸化式を求めよ．また，$h(x)$が有限の次数の多項式となるとき，その次数を n を用いて表せ．

[I-4]

情報源アルファベット A の値を確率分布 P にしたがってとる確率変数を X とする．X が記号 $x \in A$ をとる確率を $P(x)$ ，記号 x の符号語長を $l(x)$ として，瞬時符号 C の平均符号語長 $L(C)$ を

$$L(C) = \sum_{x \in A} P(x) l(x)$$

によって定義する．

情報源符号化逆定理によると，瞬時符号の平均符号語長を情報源エントロピー $H(X)$ より小さくすることはできない．すなわち，

$$L(C) \geq H(X)$$

が成り立つ．

以下の各問に答えよ．ただし，対数の底は省略せずに明示せよ．

（配点 20 点）

(1) 符号アルファベットが $B = \{0,\ 1\}$ の場合に，この定理における $H(X)$ の定義式を書け．

(2) 問(1)で，この定理の等号が成り立つ情報源（確率分布）の例をひとつあげて，その符号の木を描き，定理の等号が成り立つことを示せ．ただし，情報源記号は 3 つ以上とする．

(3) 符号アルファベットが $B = \{0,\ 1,\ \cdots,\ q-1\}$ の場合，$q \geq 3$ ならば平均符号語長は問(1)で定義した $H(X)$ より小さくなり得る．この場合でも，この定理が成り立つためには，$H(X)$ をどう定義すれば良いか書け．

(4) $q = 3$ の場合について，この定理の等号が成り立つ情報源（確率分布）の例をひとつあげて，その符号の木を描き，定理の等号が成り立つことを示せ．ただし，情報源記号は 4 つ以上とする．

[I-5]

図 1 のように，原点 O に磁気双極子モーメントが $\boldsymbol{m} = (0, 0, m)$ ($m > 0$ とする) の微小な磁石がある．いま，中心が z 軸上にあり，xy 面に平行な半径 a の円形コイルが，z 軸に沿って一定の速度 v で磁石に近づいている．なお，コイルは $z > 0$ の領域にあり，その中心の座標を $(0, 0, z_c)$ とする．また，図 2 に示す，コイルを縁とし，原点を中心とする球面の一部である領域 S 上の点を点 P とする．次の問に答えよ．ただし，空間は真空であり，磁石の大きさはコイルに比べて十分小さく，また，コイルに流れる電流がつくる磁場は無視できるものとする．なお，磁気双極子モーメント $\boldsymbol{m}$ がつくる磁場は，$\boldsymbol{r}$ を位置ベクトルとして

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi\mu_0}\left[\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}\right]$$

で与えられるとしてよい．ここで，μ_0 は真空の透磁率である．

（配点 25 点）

(1) コイルに流れる電流の向きは，次のうちどれか．(ア)または(イ)の記号で答えよ．
　(ア) 磁石からコイルを見て時計回り
　(イ) 磁石からコイルを見て反時計回り

(2) 点 P の座標を球座標系において(r, θ, ϕ)とする (図 3 参照)．点 P 上の磁場の r 方向成分と θ 方向成分をそれぞれ求めよ．

(3) 領域 S 上の，θ から $\theta+\Delta\theta$ ($\Delta\theta$ は微小角とする) の範囲にある球帯領域 (図 2 の灰色部分) を通過する磁束の大きさを求めよ．

(4) コイルを貫く全磁束の大きさを求めよ．

(5) コイルに誘起される起電力の大きさを求めよ．

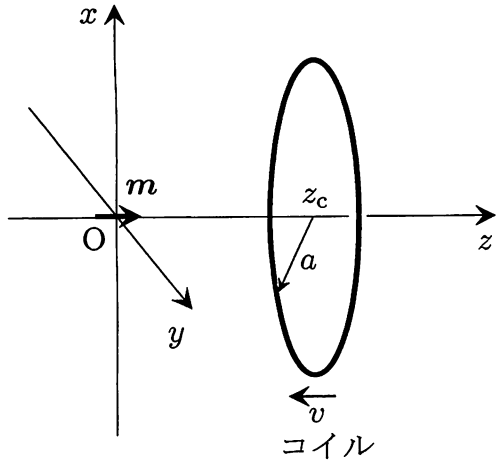

図 1

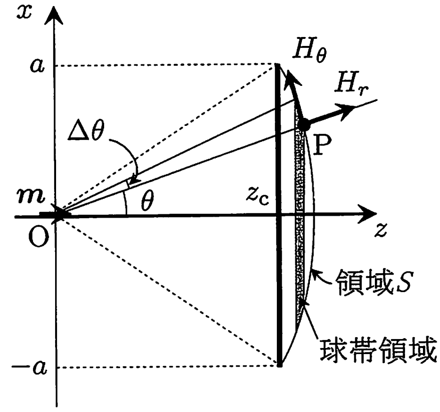

図 2

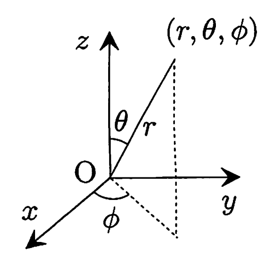

図 3

[I-6]
真空中を z 軸の正の方向に伝搬する平面電磁波の磁場 $\boldsymbol{H}(z,t)$ が，電磁波の角周波数を ω $(\omega > 0)$ ，波数を k $(k > 0)$ としたとき，次式で表されるとする．

$$\boldsymbol{H}(z,t) = \left(0, H_y, 0\right)$$
$$H_y = H_0 \cos(kz - \omega t)$$
$$H_0 > 0$$

ここで，t は時間である．真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0, μ_0 として，以下の問に答えよ．

(配点 25 点)

(1) 電場を $\boldsymbol{E}(z,t)$ とするとき，電場と磁場が直交することを示し，$\boldsymbol{E}(z,t)$ の表式を求めよ．
(2) 磁束密度 $\boldsymbol{B}(z,t)$ ならびに電束密度 $\boldsymbol{D}(z,t)$ を求めよ．
(3) 電場と磁束密度の大きさの比 $|\boldsymbol{E}(z,t)|/|\boldsymbol{B}(z,t)|$ を電磁波の伝搬速度 c を用いて表せ．
(4) 電磁場のエネルギー密度を求めよ．また，電場と磁場のエネルギー密度の比を求めよ．
(5) ポインティングベクトルの大きさと向きを示せ．

[I-7]

単位体積あたり N 個の自由電子を含む電子気体を考える．この電子気体の実効的な誘電率と電子気体の中を伝搬する平面電磁波の分散関係を求めてみよう．一様な振動電場 $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos\omega t$ が作用しているとき，個々の電子は運動方程式

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}(t) = -e\boldsymbol{E}(t)$$

を満たす．ここで，e は素電荷，m は電子の質量，$\boldsymbol{r}(t)$ は電子の位置座標，t は時間，ω は角周波数，$\boldsymbol{E}_0$ は定ベクトルである．以下の各問に答えよ．ただし，電子は真空中にあり，真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0, μ_0 とする．また，電子間の相互作用や電子と磁場の相互作用は無視してよい．

（配点 25 点）

(1) 電子の双極子モーメントの振動解を求めよ．

(2) 電子気体の分極ベクトルを求めよ．

(3) 電子気体の誘電率を求めよ．

(4) 電子気体の中を伝搬する平面電磁波（横波）の分散関係 $\omega(k)$ を求めよ．ここで，k は波数である．

(5) 長波長極限 $k \to 0$ における位相速度と群速度を求めよ．

(6) この系では低周波域において平面電磁波（横波）は伝搬できない．遮断周波数を求めよ．また，低周波極限 $\omega \to 0$ におけるエバネッセント波の減衰定数を求めよ．