電子光科学　I

次の [I-1] から [I-8] までの８問についてそれぞれ別の答案用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の答案用紙を用いる場合は，「[I-1]（２枚目）」などのように明記せよ．

[I-1]

次の連立微分方程式を解け．（配点 15 点）

$$\frac{dy}{dx} = 2y - z$$

$$\frac{dz}{dx} = 4y - 3z$$

[I-2]

正則関数

$$f(z) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$$

について以下の問に答えよ．ただし，$z = x + iy$ は複素数，x, y は実数，i は虚数単位である．

（配点 15 点）

(1) $f(z)$ が正則となるように実数係数 a, b, c, d を定めよ．

(2) $\dfrac{df}{dz}$ を求めよ．

(3) $\int_{-1-i}^{1+i} f(z)\,dz$ を計算せよ．積分路は自由に選んでよい．

[I-3]

漸化式 $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$ を満たす数列 $\{f_n\}$ は行列

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

と表現できる．$f_0=f_1=1$ として，以下の問に答えよ．（配点 15 点）

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) 問(1)で求めた固有値を $\lambda_1, \lambda_2\ (\lambda_1>\lambda_2)$ として，f_n を λ_1, λ_2, n を用いて表せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}$ を求めよ．

[I-4]

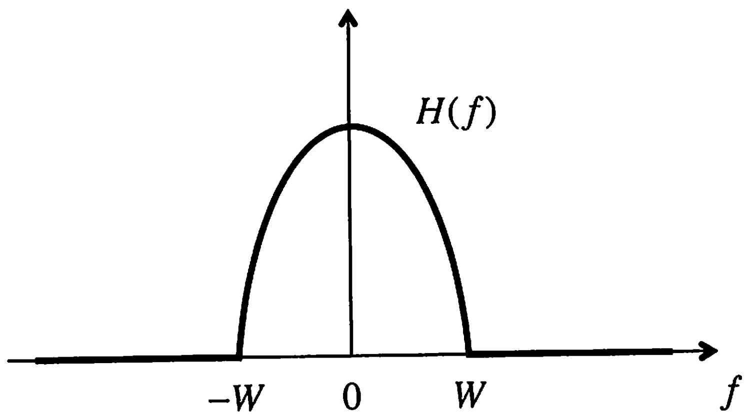
連続関数 $h(t)$ の時間間隔 T ごとの標本値 $h(nT)$ を用いて

$$\hat{h}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT)\delta(t-nT)$$

を定義する．ここで $\delta(t)$ はデルタ関数である．$h(t)$ のフーリエ変換を $H(f)$ として，以下の問に答えよ．　　(配点 15 点)

(1) $\hat{h}(t)$ のフーリエ変換 $\hat{H}(f)$ を $H(f)$ で表す式を導出せよ．

(2) $H(f)$ が下図で与えられ，$H(f)=0\ (|f|>W)$ とする．$\hat{h}(t)$ から $h(t)$ が再現できる条件を記し，その条件が満たされている場合について，問(1)の結果を用いて $\hat{H}(f)$ の概形を描け．ただし，横軸には必要な値を明記せよ．



[I-5]

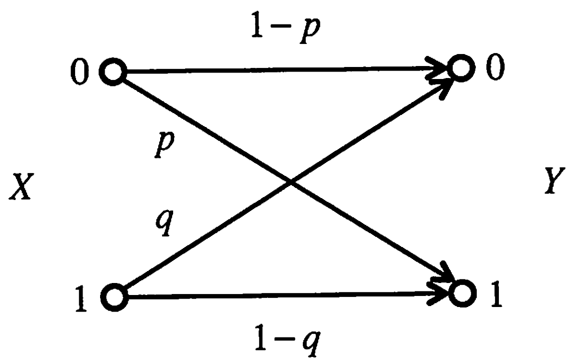
下図の通信路について，以下の問に答えよ．ただし，X, Y はそれぞれ通信路の入力と出力を表す確率変数であり，$0 \le p \le 1,\ 0 \le q \le 1$ とする．対数の底を２として，２元エントロピー関数

$$h(u) = -u \log u - (1-u) \log (1-u)$$

を用いよ．　　　　（配点 15 点）

(1) 入力の確率分布を $P_X(0) = r,\ P_X(1) = 1 - r$ として，X と Y の相互情報量を求めよ．ただし，$0 \le r \le 1$ とする．

(2) $q = p$ の場合について，通信路容量 C を求めて，p に対する依存性を図示せよ．



[I-6]
以下の各問に答えよ.　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(配点 25 点)

図 1 のように無限に広い厚さの無視できる導体板に電荷が面密度 σ_0 (> 0)で一様に分布している. 面上のある点を点 O, 点 O から垂直に h だけ離れた点を点 P とする. ただし, 導体板のまわりの空間は真空とし, 真空の誘電率を ε_0 とする.

(1) 点 P の電場 $\mathbf{E}_1$ の大きさを求めよ. またその向きを示せ.
(2) 点 O に対する点 P の電位 V_1 を求めよ.

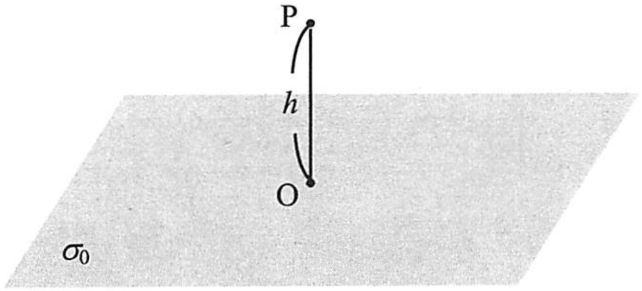


図 1

次に, この導体板に図 2 のように点 O を中心として半径 a の円形の穴をあけた. 導体板の電荷分布は変化せず一様の面密度 σ_0 であるとする.

(3) 点 O に対する点 P の電位 V_2 を求めよ.
(4) 点 P の電場 $\mathbf{E}_2$ の大きさを求めよ. またその向きを示せ.

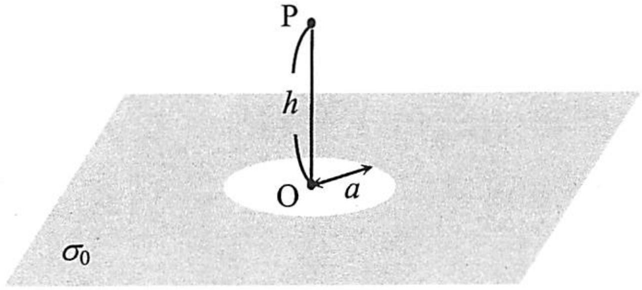


図 2

[I-7]

下図に示すようにループの面に垂直方向の磁束密度$B(x) = B_0\frac{x}{a}$ $(B_0 > 0)$ の中を金属線でできた正方形のループが重力加速度gの下で落下している（鉛直下向きをx軸の正の向きとする）．ループの重心は正方形の中心点 G にあり，時刻tにおける重心のx座標を$x_G(t)$とする．ループの一辺の長さをa，ループの一周の抵抗値をR，ループの質量をmとして以下の問に答えよ．ただし，空気抵抗およびループの自己インダクタンスは無視できるものとし，ループが回転したり傾いたりすることはないものとする．

（配点 25 点）

(1) 時刻tでのループを貫く磁束を求めよ．

(2) ループが落下することでループを貫く磁束が変化し，誘導起電力によりループに電流が流れる．ループの重心の速度$v_G(t) = \frac{dx_G(t)}{dt}$を用いてループに流れる電流を表せ．またその向きを示せ．

(3) ループの落下運動についての運動方程式は

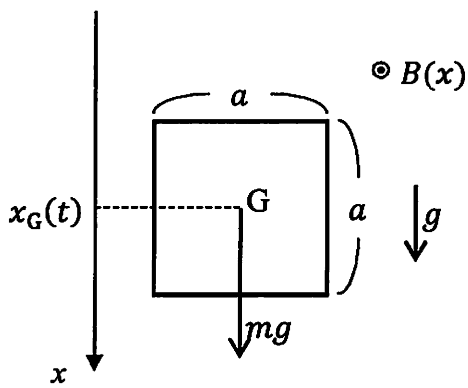
$$m\frac{dv_G(t)}{dt} = mg - kv_G(t)$$

の形で書くことができる．このときのkをB_0，R，aを用いて表せ．

(4) 問(3)の微分方程式の解は，ループが時刻$t = 0$で静止していたとすると

$$v_G(t) = \frac{mg}{k}\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right]$$

で与えられる．十分時間が経った後にループにおいて発生するジュール熱を求め，これがループに対して重力がする仕事率と等しくなることを示せ．



[I-8]
下図に示すように，十分に広い2枚の完全導体平板に挟まれた空間（真空）を考える．2枚の導体平板はいずれも x 軸に垂直で，導体平板と空間の境界は $x=0$ および $x=a$ $(a>0)$ である．この空間を，角周波数が ω で波数ベクトルが $\mathbf{k}_1=(-k_x,\ 0,\ k_z)$ および $\mathbf{k}_2=(k_x,\ 0,\ k_z)$ $(k_x>0,\ k_z>0,\ k_x^2+k_z^2=k^2,\ k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, ε_0 および μ_0 はそれぞれ真空の誘電率および透磁率）である2つの平面電磁波が伝搬している．2つの電磁波は，いずれも電界については y 方向成分のみを持ち，それぞれ次式で表されるものとする．

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{y}} E_1 \exp\{j(\omega t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})\}$$
$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{y}} E_2 \exp\{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})\}$$

ここで，$\hat{\mathbf{y}}$ は y 方向の単位ベクトル，E_1 および E_2 は電界の複素振幅，j は虚数単位，$\mathbf{r}$ は位置ベクトルである．以下の問に答えよ．（配点 25 点）

(1) 2つの電磁波の磁界をそれぞれ示せ．
(2) 重ね合わされた電磁波の境界条件を示し，E_1 と E_2 の関係，および k_x と a の関係を求めよ．
(3) 重ね合わされた電磁波のうちで x 方向の定在波の波長が最も長くなるものについて，z 方向の位相速度および群速度を，ω, k, a を用いて表せ．