電子光科学　I

次の[I-1]から[I-6]の６問について，それぞれ別の解答用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合は，「[I-1]（２枚目）」などのように明記せよ．

[I-1]

$f(x) = \tanh^{-1}x + \tan^{-1}x$ $(-1 < x < 1)$について，以下の問に答えよ．ただし，iは虚数単位である．

（配点 15 点）

(1) $f(x) = \frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - i\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)\right\}$ となることを導出せよ．

(2) $\log(1+z)$ $(|z| < 1)$ のマクローリン展開を使って，$f(x)$をマクローリン展開せよ．

[I-2]

θ は実数, $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$ とする．以下の問に答えよ．ただし, i は虚数単位とする．

（配点 20 点）

(1)　$z = e^{i\theta}$ とおいて I を z に関する積分で表せ.

(2)　問(1)で求めた被積分関数の極をすべて求めよ.

(3)　I を求めよ.

[I-3]

通信路と線形符号について，以下の問に答えよ．（配点 20 点）

(1) 通信路行列が次式で表される通信路を用いて，長さnの符号語を送信したとき，受信語にk個の誤りが生じる確率と受信語に生じる誤りの個数の平均を求めよ．ただし，$k = 0, 1, 2, \cdots, n$とする．

$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{bmatrix}, \qquad \left(0 < \varepsilon \ll \tfrac{1}{2}\right)$$

(2) パリティ検査行列が次式で表される線形符号で，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$ が符号語であれば，$\bar{\boldsymbol{v}} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5, \bar{v}_6, \bar{v}_7, \bar{v}_8)$ も符号語となることを示せ．ただし，$\bar{v}_i = 1 - v_i$, $v_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, 3, \cdots, 8)$ とする．

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

以下の問では，問(1)の通信路で問(2)の線形符号を用いて通信を行った場合を考える．

(3) 受信語が (1,1,1,1,0,1,0,1) のとき，送信された符号語を推定せよ．符号語が推定できない場合は，その理由を簡潔に述べ，受信語に含まれる可能性のある誤りの個数を全て挙げよ．

(4) 受信語が (1,0,1,1,1,1,0,0) のとき，送信された符号語を推定せよ．符号語が推定できない場合は，その理由を簡潔に述べ，受信語に含まれる可能性のある誤りの個数を全て挙げよ．

(5) 一般の受信語について，復号結果に含まれる誤りの個数の平均を，ε の次数が低い方から 2 項まで求めよ．ただし，符号語が推定できない場合は，受信語をそのまま復号結果とせよ．

[I-4]
電子スピンの量子力学的運動を考える．電子のスピン自由度のみを考え，z 軸方向に磁場をかけたときの固有状態を基底として，規格化された 2 次元の複素ベクトル

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$$

を用いて電子スピン状態を表す．この電子スピンに磁場 $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ をかけたときのハミルトニアンを，μ をボーア磁子として，

$$H = \mu \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mu\left(B_x \sigma_x + B_y \sigma_y + B_z \sigma_z\right)$$

とする．ただし，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ とし，パウリ演算子 σ_α （$\alpha = x, y, z$） は，虚数単位を i として，

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とした．また，時刻 t の電子スピン状態 $|u(t)\rangle$ が従うシュレーディンガー方程式は，換算プランク定数 $\hbar$ を用いて，

$$i\hbar \frac{d}{dt}|u(t)\rangle = H|u(t)\rangle$$

で与えられる．以下の問に答えよ．

（配点 20 点）

(1) 電子スピン状態 $|u\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ に対して，パウリ演算子の期待値 $\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle, \langle\sigma_z\rangle$ を計算せよ．

(2) 初期状態 $|u(0)\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ に対して，磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$（$B_0 > 0$）のもとで時間発展させたときの時刻 $t > 0$ における電子スピン状態 $|u(t)\rangle$ を求めよ．また，$\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle$ を求め，その軌跡を２次元平面に図示せよ．

(3) 磁場 $\mathbf{B} = (B_0, 0, B_0)$ をかけたときの固有エネルギーと規格化された固有状態を求めよ．

[I-5]
図のように，z 軸を中心とする半径 a と b （$a < b$）の２重円筒導体が真空中におかれている．円筒は z 方向に無限に長く，円筒の厚みは無視できるものとする．円柱座標 (r, ϕ, z) を用いて，以下の問に答えよ．ただし，真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0 と μ_0 とする．また，虚数単位を i とする．
（配点 45 点）

(1) 内部円筒と外部円筒に z 方向の単位長あたりそれぞれ Q と $-Q$ の電荷が一様に分布しているとする．

a) 電場 (E_r, E_ϕ, E_z) を $0 < r < a$，$a < r < b$，$b < r$ の各領域においてそれぞれ求めよ．

b) 内部円筒と外部円筒の電位差 V を求めよ．

c) z 方向の単位長あたりの電気容量を ε_0, a, b を用いて記せ．

d) z 方向の単位長あたりの電気エネルギーを求めよ．

(2) 内部円筒と外部円筒にそれぞれ $I\hat{\mathbf{z}}$ と $-I\hat{\mathbf{z}}$ の電流が一様に流れているとする．$\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向の単位ベクトルである．

a) 磁束密度 (B_r, B_ϕ, B_z) を $0 < r < a$，$a < r < b$，$b < r$ の各領域においてそれぞれ求めよ．

b) z 方向の単位長あたりの磁束 Φ を求めよ．

c) z 方向の単位長あたりのインダクタンスを μ_0, a, b を用いて記せ．

d) z 方向の単位長あたりの磁気エネルギーを求めよ．

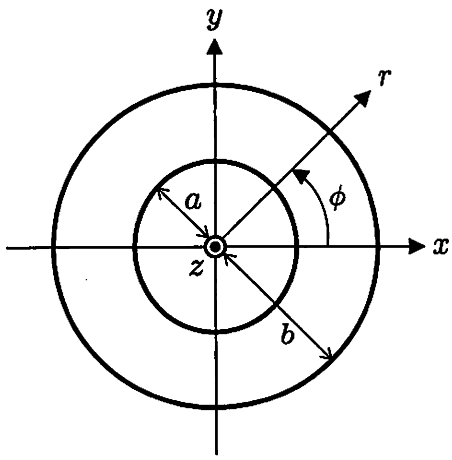
(3) 電位差 V と電流 I が位置 z と時間 t に依存するとき，ファラデーの法則と電荷の保存則にしたがい

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial I}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

が成り立つ．複素数表示の進行波解 $V(z,t) = V_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ と $I(z,t) = I_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ を仮定して，次の問に答えよ．ただし，$\omega, k > 0$ とする．

a) 位相速度 $v = \omega/k$ と特性インピーダンス $Z_0 = V_0/I_0$ を求めよ．

b) 進行波解に対応する電磁波の波動インピーダンスと複素ポインティングベクトルを求めよ．



[I-6]

図のように，帯電していない無限に長い導体円筒を，一様な磁場中で z 軸を中心に角速度 ω で回転させたところ，円筒内で電荷分布が生じた．磁場は z 軸に平行であり，磁束密度の大きさは B である．また，円筒の内径は a，外径は b である．次の問に答えよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．また，回転する電荷がつくる磁場は無視してよい．必要であれば以下の円柱座標系 (r, ϕ, z) における発散の公式を用いよ．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}A_\phi + \frac{\partial}{\partial z}A_z$$

（配点 30 点）

(1) z 軸から距離 r $(a < r < b)$ の位置における電場 (E_r, E_ϕ, E_z) を求めよ．

(2) 円筒の内側の面に対する外側の面の電位を求めよ．

(3) z 軸から距離 r $(a < r < b)$ の位置における電荷密度を求めよ．

(4) z 方向の単位長あたりの円筒の内側の面の表面電荷密度を求めよ．

(5) z 方向の単位長あたりの円筒の外側の面の表面電荷密度を求めよ．