電子光科学　I

<u>次の[I-1]から[I-7]の７問について，それぞれ別の解答用紙に答えよ．なお，各問題に２枚以上の解答用紙を用いる場合は，「[I-1]（２枚目）」などのように明記せよ．</u>

[I-1]

3 次実正方行列$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$について以下の問に答えよ．ただし，$b \neq 0$とする．

（配点 15 点）

(1) Aの固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) Aを対角化する直交行列Pを求めよ．

[I-2]
複素関数 $f(z)=e^{-z^2}$ を図の積分路 0→A→B→0 で積分することを考える．円弧 AB は半径 r の 1/8 円周である．以下の問に答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

（配点 20 点）

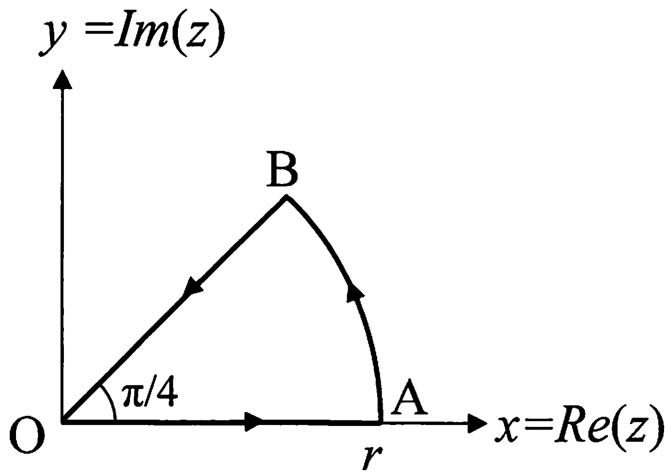
(1) 線分 OB 上の点 z の原点 0 からの距離を t として，この線分上の点 z に対する $f(z)$ を t, i を用いて表せ．

(2) 積分 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ を求めよ．

(3) 積分路 0→A→B→0 で $f(z)$ の積分を実行し，$r\to\infty$とすることによって，

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx$$

を求めよ．ただし，$\lim_{r\to\infty}\int_{AB} f(z)dz=0$ は証明せずに用いてもよい．



[I-3]

以下の問に答えよ.

（配点 20 点）

(1) $f(x)$ を x の関数とする．以下の微分方程式の一般解を x の関数 $P(x)$ の不定積分を用いて表せ.

$$f'(x) + P(x)f(x) = 0$$

(2) $z(x)$ を x の関数とする．以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$z'(x) + z(x) = \frac{1}{4}$$

(3) $y(x)$ を x の関数とする．以下の微分方程式の一般解を求めよ.

$$-2y'(x) + y(x) = \frac{1}{4}y^3(x)$$

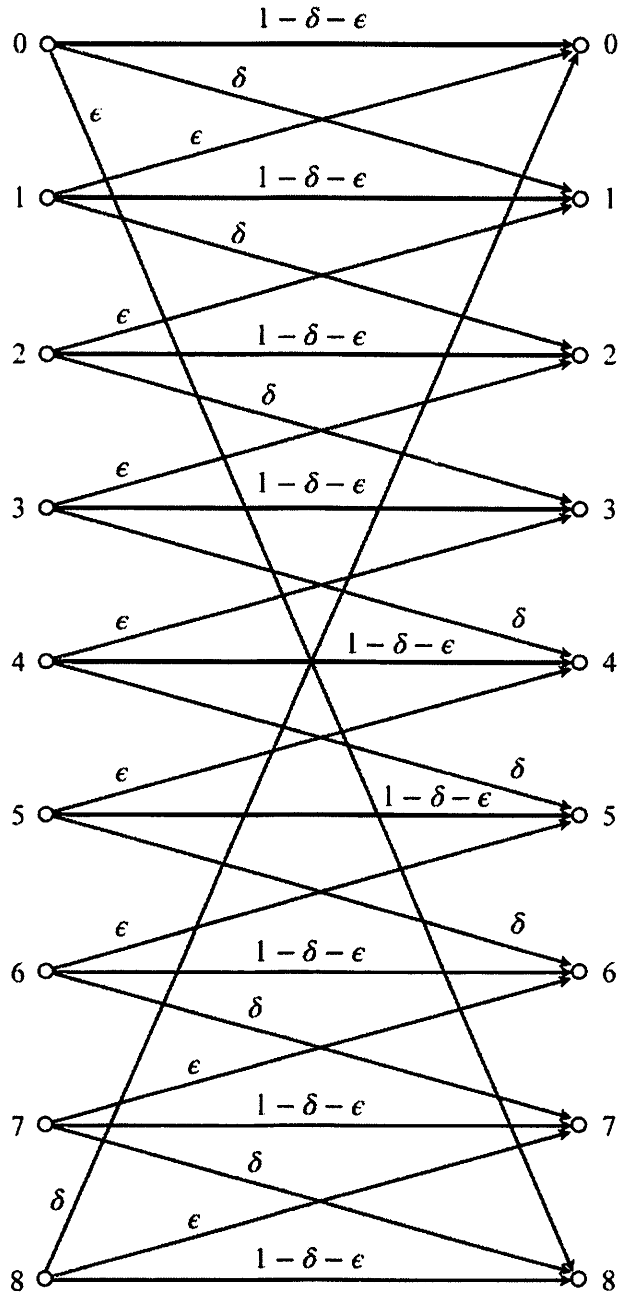
[I-4]
図の通信路について，以下の問に答えよ．ただし，$\delta \geq 0$, $\epsilon \geq 0$, $\delta + \epsilon \leq 1$とする．

（配点 20 点）

(1) この通信路の通信路容量C_0を計算せよ．

(2) 通信路容量C_0を最小にするδ, ϵ，および，そのときのC_0を求めよ．

(3) 問(2)の最小のC_0と同じ伝送速度で誤りの無い通信を行う方法を説明せよ．
ただし，符号長は 1 とする．



[I-5]

図 1 に示すように，真空中に接地された半径 a の導体球が点 O を中心として置かれており，点 O から距離 L の点 P に電荷量 q の点電荷が置かれている．点 P の電荷が作る電場により導体球の表面には電荷が誘起される．このとき，球外部の電場を求めるには，図 2 に示すように導体球の代わりに，線分 OP 上の点 O からの距離 b の位置にある点 Q に電荷量 q' の仮想的な電荷（影像電荷）を考えればよい．球面上の点を点 S（∠POSの角度を θ とする），真空の誘電率を ε_0 として，以下の問に答えよ．

（配点 25 点）

(1) 点 S の電位が θ に依らずにゼロであることを用いて，b と q' をそれぞれ a，L，q のうち必要なものを用いて表せ．

(2) 導体球表面に誘起される表面電荷密度 $\sigma(\theta)$ を求めよ．

(3) 導体球表面に誘起される電荷の総量を求めよ．

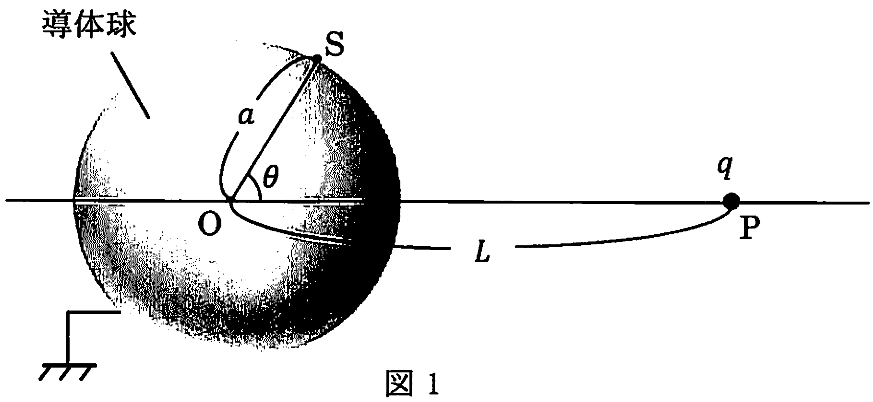


図 1

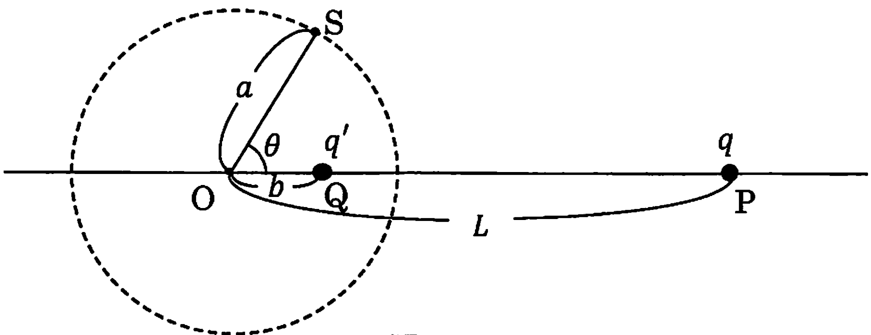


図 2

[I-6]

無限に長い円柱導体に一様な静電場が軸方向（z 方向）に作用しており，円柱には定常電流が一様に流れている．円柱の中心軸上に原点をおいた図のような円柱座標 (r, ϕ, z) を用いて，以下の問に答えよ．ただし，円柱の半径は a，電場は $\mathbf{E} = (0, 0, E)$，電流密度は $\mathbf{J} = (0, 0, J)$ とする．円柱の外部は真空であり，真空と円柱の透磁率はともに μ_0 とする．また，真空中にも一様な電場 $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ があるとする．

（配点 25 点）

(1) 磁束密度 $\mathbf{B} = (B_r, B_\phi, B_z)$ を円柱の内部と外部でそれぞれ求めよ．

(2) ベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = (A_r, A_\phi, A_z)$ を円柱の内部と外部でそれぞれ求めよ．ただし，$r = a$ において $\mathbf{A} = (0, 0, 0)$ とする．

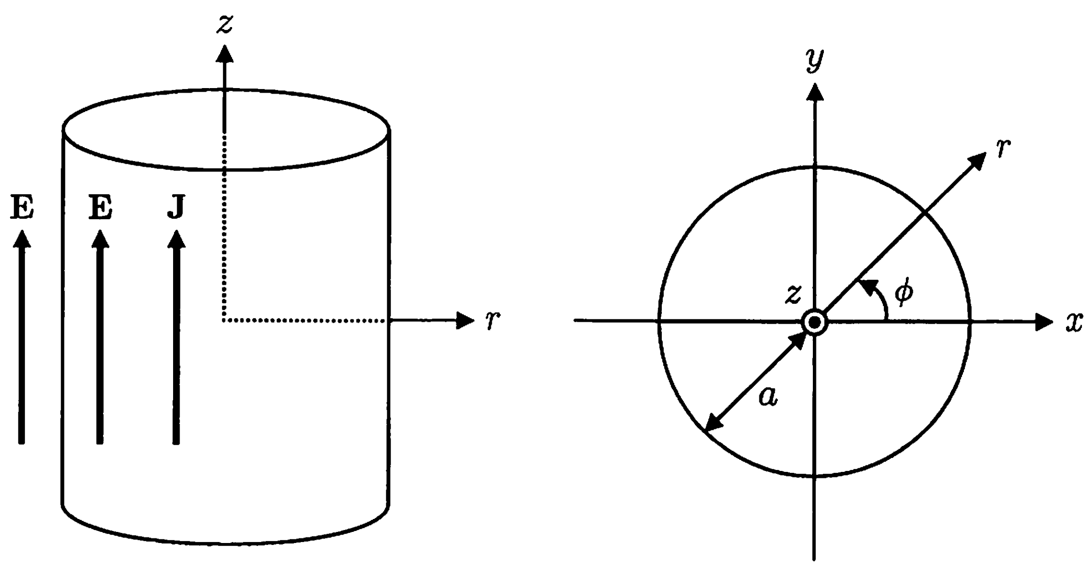
(3) 磁場のエネルギー密度を円柱の内部と外部でそれぞれ求めよ．

(4) ポインティング・ベクトル $\mathbf{S} = (S_r, S_\phi, S_z)$ を円柱の内部と外部でそれぞれ求めよ．

(5) ポインティング・ベクトルの発散 $\nabla \cdot \mathbf{S}$ と $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$ の関係を記せ．必要であれば

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r S_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} S_\phi + \frac{\partial}{\partial z} S_z$$

を用いてよい．



[I-7]

下図のように, $z<0$ の自由空間と $z\geq 0$ にある誘電体との間の $z=0$ の境界面に, 角周波数 ω で振動する一様な面電流を流したところ, 自由空間および誘電体の各領域に平面波が発生した. 面電流の線密度は $\mathbf{J}_\mathrm{s}=\dot{J}_0\hat{\mathbf{x}}$ ($\dot{J}_0$ はフェーザ表示された y 方向の単位長さあたりの電流, $\hat{\mathbf{x}}$ は x 方向の単位ベクトル）である. 誘電体の比誘電率を ε_r, 真空の誘電率および透磁率をそれぞれ ε_0 および μ_0 として, 次の問に答えよ.

（配点 25 点）

(1) 自由空間および誘電体のそれぞれの領域における電磁波の波数ベクトルおよび波動インピーダンスを設問で与えられた量を用いて示せ. 必要であれば y および z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{\mathbf{y}}$ および $\hat{\mathbf{z}}$ とせよ. （本問では導出の必要はない.）

(2) 自由空間および誘電体のそれぞれの領域における電場および磁場を求めよ. ただし, 大きさおよび方向を明示すること.

(3) 自由空間および誘電体のそれぞれの領域における複素ポインティング・ベクトルを求めよ. また, その結果から $\varepsilon_\mathrm{r}\gg 1$ の場合の各領域の電磁波の伝搬について論ぜよ.